www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE CENTRALE PARIS
ECOLE CENTRALE DE LYON

Concours d'Admission 1990

T.A

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

MATHEMATIQUES II

L'espace E (affine, euclidien, de dimension 3) est rapporté à un repère orthonormal direct $R_0=(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, d'axes Ox, Oy, Oz. On appelle S la sphère du centre O et de rayon l'unité, C le cône engendré par les droites passant par O et faisant avec Oz l'angle $\frac{\pi}{6}$.

Pour tout réel t, on pose : $\vec{u}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$, $\vec{v}(t)=\vec{u}(t+\frac{\pi}{2})$. R_t désigne le repère $\left(O;\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{k}\right)$.

PREMIERE PARTIE

I-1. Donner une équation cartésienne dans R_0 de S. Etablir que $z^2=3(x^2+y^2)$ est une équation de C dans R_0 ; donner une équation de C dans R_t.

Déterminer l'intersection Γ des deux surfaces S et C : nature, éléments remarquables.

I-2. Dans cette question et la suivante, on se propose d'étudier les isométries f de E qui transforment en elle-même $\Gamma = S \cap C$, c'est-à-dire telles que $f(\Gamma)=\Gamma$. Ces isométries forment manifestement un sous-groupe G du groupe des isométries de E, ce que l'on ne demande pas de vérifier.

a) Montrer que, si une isométrie f appartient à G, l'ensemble des deux points de coordonnées $(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(0,0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ est globalement invariant par f.

b) Montrer qu'une isométrie f appartient à G si et seulement si elle laisse O invariant et laisse la droite Oz globalement invariante.

c) Montrer qu'une isométrie f appartient à G si et seulement si f(S) = S et f(C) = C.

I-3.a) Toute isométrie f de E conservant O est définie dans le repère R_0 par une matrice J_f d'ordre 3. Quelle doit être la forme de J_f pour que f appartienne à G ? Donner pour chacune des matrices J_f trouvées une définition géométrique de f.

b) Quelles sont les réflexions appartenant à G ?

DEUXIEME PARTIE

Pour tout couple de réels (t, θ) on pose : $\vec{k}_1(t)=\frac{1}{2}\vec{v}(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

$$A(t,\theta)=O+\cos\theta\,\vec{u}(t)+\sin\theta\,\vec{k}_1(t)$$

$$\vec{w}(t,\theta)=A'_\theta(t,\theta)=-\sin\theta\,\vec{u}(t)+\cos\theta\,\vec{k}_1(t).$$

et l'on désigne par $D_{t,\theta}$ la droite passant par le point $A(t,\theta)$ et de vecteur unitaire $\vec{w}(t,\theta)$.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on note $\vec{u},\vec{v},\vec{k}_1,\vec{w}$, A, D pour $\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{k}_1(t),\vec{w}(t,\theta),A(t,\theta),D_{t,\theta}$.

II-1.a) Montrer que l'ensemble des droites $\left(O;\vec{k}_1(t)\right)$, t décrivant $\mathbb{R}$, est le cône C.

b) Montrer que le plan $(O;\vec{k}_1(t),\vec{u}(t))$, noté π_t, est le plan tangent à C le long de la génératrice $(O;\vec{k}_1(t))$. Quelle est l'intersection de C et de π_t ?

c) Soit t et t' deux réels. Quand a-t-on $\pi_{t'}=\pi_t$?

II-2. Soit t un réel fixé et γ_t l'intersection de S et de π_t. Quelle est la nature de γ_t ?
Montrer que, lorsque θ varie, le point $A(t,\theta)$ décrit γ_t. Interpréter géométriquement θ.

Tourner la page

II-3.a) Montrer que $D_{t,\theta}$ est située dans le plan π_t et préciser la position de $D_{t,\theta}$ par rapport à γ_t.

b) Pour t fixé, étudier selon θ, l'intersection de $D_{t,\theta}$ et de C (on pourra considérer la figure dans le plan π_t).

II-4. On appelle Δ l'ensemble des droites tangentes à S (c'est-à-dire contenant un point de S et contenues dans le plan tangent à S en ce point) et situées dans un plan tangent à C.

a) Montrer que, pour tout couple de réels (t,θ), $D_{t,\theta}$ appartient à Δ.

b) Réciproquement, montrer que toute droite appartenant à Δ est une droite $D_{t,\theta}$ pour des couples (t,θ) convenables.

II-5. Soit d la droite d'équations $\begin{cases} x + 3y + \sqrt{6}\ z - 4 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

a) Donner une équation du plan passant par O et contenant d ; montrer que c'est un plan tangent à C.

b) Donner une représentation paramétrique de d ; étudier l'intersection de d et S.

c) Etablir que d appartient à Δ. Donner un couple (t,θ) tel que $D_{t,\theta} = d$.

II-6. Trois réels t,θ,ρ étant donnés, on considère le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \rho\vec{w}$.

Exprimer $\overrightarrow{OM}^2$ en fonction de ρ. Exprimer $z = \overrightarrow{OM}.\vec{k}$ en fonction de ρ et de θ.

II-7. On désigne par Σ_θ la surface décrite par $D_{t,\theta}$ lorsque t varie, θ restant fixe.

a) Montrer que Σ_θ est une surface de révolution.

b) Déterminer $\Sigma_{\pi/2}$ et $\Sigma_{-\pi/2}$.

c) Déterminer une équation de Σ_θ dans R_0 (on pourra utiliser les calculs effectués au II-6.).

d) En déduire la nature de Σ_θ (on pourra être conduit à considérer une translation des axes de vecteur $\lambda\vec{k}$, λ convenablement choisi).

TROISIEME PARTIE

A tout réel t on associe la droite $d_t = D_{t,-t/2}$ (c'est à dire $D_{t,\theta}$ où $\theta = -t/2$). On appelle μ la surface engendrée par d_t quand t décrit $\mathbb{R}$. Le vecteur $\vec{w}(t,-t/2)$ (c'est-à-dire $\vec{w}(t,\theta)$ avec $\theta = -t/2$) sera noté $\vec{\omega}(t)$. Le point $A(t,-t/2)$ sera désigné par P(t).

III-1. Montrer que μ est définie par le paramétrage $(t,\rho) \to M(t,\rho) = P(t) + \rho\vec{\omega}(t)$.

Déterminer les coordonnées de $M(t,\rho)$ et de P(t) dans le repère $R_t = (O ; \vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{k})$ et dans le repère R_0.

III-2. Soit L la courbe décrite par P(t), t décrivant $\mathbb{R}$.

Tracer les projections de L sur les plans xOy et yOz.

Faire un croquis perspectif représentant L et $S \cap C$ tracées sur S.

III-3.a) Quels sont les points non réguliers de L ?

b) Lorsque P(t) est un point régulier, établir que la tangente à L en ce point est orthogonale à π_t.

Que peut-on dire de l'angle de cette droite avec Oz ?

c) Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ doit-on faire varier t pour que L soit parcourue entièrement une fois et une seule ? Calculer la longueur ainsi parcourue.

III-4.a) Pour quelles valeurs de t le point P(t) est-il un point régulier de μ ? Déterminer alors la normale en P(t) à μ.

b) On fixe t tel que P(t) soit point régulier de μ. Comment choisir ρ pour que le point $M(t,\rho)$ soit poir régulier de μ ? Comparer alors le plan tangent à μ en $M(t,\rho)$ et le plan tangent à μ en P(t).

*** FIN ***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail